Die Gravitation zwischen nichtpunktförmigen Massen

Eine Gravitationskraft ist eine Kraft zwischen genau zwei Massen. Sie wird mit Hilfe der Newtonschen Gravitationsgleichung

$$G = \gamma \cdot \frac{m_0 \cdot m_1}{a^2} \qquad (1)$$

$$\text{mit } \gamma = 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \ \frac{Nm^2}{kg^2}$$

$$Gravitationskonstante$$

berechnet. Dabei wird für a die Distanz der Schwerpunkte der Massen verwendet. Das heißt, es wird angenommen, daß für die Berechnung der Gravitation die Massen von m_0 und m_1 (Abb. 1) in den Schwerpunkten vereint und nicht in einem Raumgebiet V verteilt seien. Diese Annahme gilt jedoch nur dann mit hinreichender Genauigkeit, wenn die Abmessungen der Massen klein gegen ihre Distanz a sind. Bei Verringerung der Distanz wird dies jedoch ungenau. Es müssen für die Berechnung der Gravitation die Kräfte einzelner Massenelemente dm_0 und dm_1 summiert werden, deren Gravitationskräfte wegen der verschiedenen Distanzen nicht mehr als gleich angesehen werden können. Die Massenelemente mit kleinerer Distanz werden größere Gravitationskräfte bedingen, die mit größerer Distanz kleinere. Die summierte Gravitation aller Massenelemente beider Massen ergibt dann die Gesamtgravitation beider Massen. Für die Berechnung der Gesamtgravitation wird folglich in jeder der Massen ein fiktiver Punkt G als Vereinigungspunkt der gesamten Masse entstehen (Abb. 1), der nicht mit dem Schwerpunkt S der Masse identisch ist. Der Punkt heiße *Gravitationspunkt der nichtpunktförmigen Masse*. Es entsteht eine Deviation des Gravitationspunktes vom Schwerpunkt. Die Distanz dieser Punkte G beider Massen, a_g, ist dann als Distanz der Massen in die Newtonsche Gravitationsgleichung (1) einzusetzen. Das Ziel der nachfolgenden Berechnung besteht in der Ermittlung der Deviation $d = a - a_g$ des Punktes G. Als Methode zur Berechnung der Deviation soll ein Faktor f ermittelt werden (Deviationsfaktor), dessen Produkt mit a die äquivalente Distanz a_g ergibt, mit der aus Gleichung (1) die Gravitationskraft berechnet werden kann:

$$a \cdot f = a_g$$

Die Deviation ergibt sich daraus zu

$$d = a - a_g = a \cdot (1 - f) \qquad (2)$$

Für die Berechnung werden folgende vereinfachte Bedingungen angenommen:

- Beide Massen m_0 und m_1 seien homogen mit konstanter Massendichte δ.
- Die Abmessung der Masse m_0 sei gegen die Distanz a vernachlässigbar klein, so daß sie als Punktmasse behandelt werden kann.
- Die Masse m_1 habe die Form einer Kugel mit dem Radius r.

Die Kugel mit der Masse m_1 wird entlang der x-Koordinate in senkrecht zur x-Richtung stehende Kreisscheiben der Dicke dx geschnitten, deren Querschnittsfläche s durch die Kugeloberfläche begrenzt ist. Bei der Bestimmung der Gravitation zwischen m_0 und den Masseelementen dm_s auf einer Kreisscheibe entstehen wegen des Winkels zwischen der x-Richtung und der Richtung $m_0 - dm_s$ Kraftkomponenten in der y-Richtung. Diese Komponenten kompensieren sich jedoch, weil zu jeder y-Komponente der Gravitation $m_0 - dm_s$ eine gleichgroße Komponente in der Gegenrichtung vorhanden ist. Somit kann man die Masse der Scheibe betrachten, als sei sie im Mittelpunkt der Scheibe vereint.

Es ist anzumerken, daß dies eine Näherung ist. Exakt betrachtet müßten für diese Verfahrensweise nicht ebene Scheiben, sondern Kugelschalen verwendet werden, die mit der Abstandsgröße *x* in das Kugelvolumen gezeichnet werden. Dieses Herangehen würde einen erheblich größeren Rechenaufwand zur Folge haben, als in der Näherung. Eine alternative Herangehensweise ist die Bildung der Summe aller Gravitationskräfte dm_S innerhalb einer Scheibe, die nach (1) mit den Hypotenusen der Dreiecke aus der Distanz *x* und dem zugehörigen *y*-Wert berechnet werden. Diese weiterführenden Berechnungen sollen Gegenstand einer nachfolgenden Arbeit sein. In der nachfolgenden Darstellung soll die Masse einer Scheibe der Dicke *dx* als Massenelement dm_1 der kugelförmigen Masse m_1 angesehen werden.

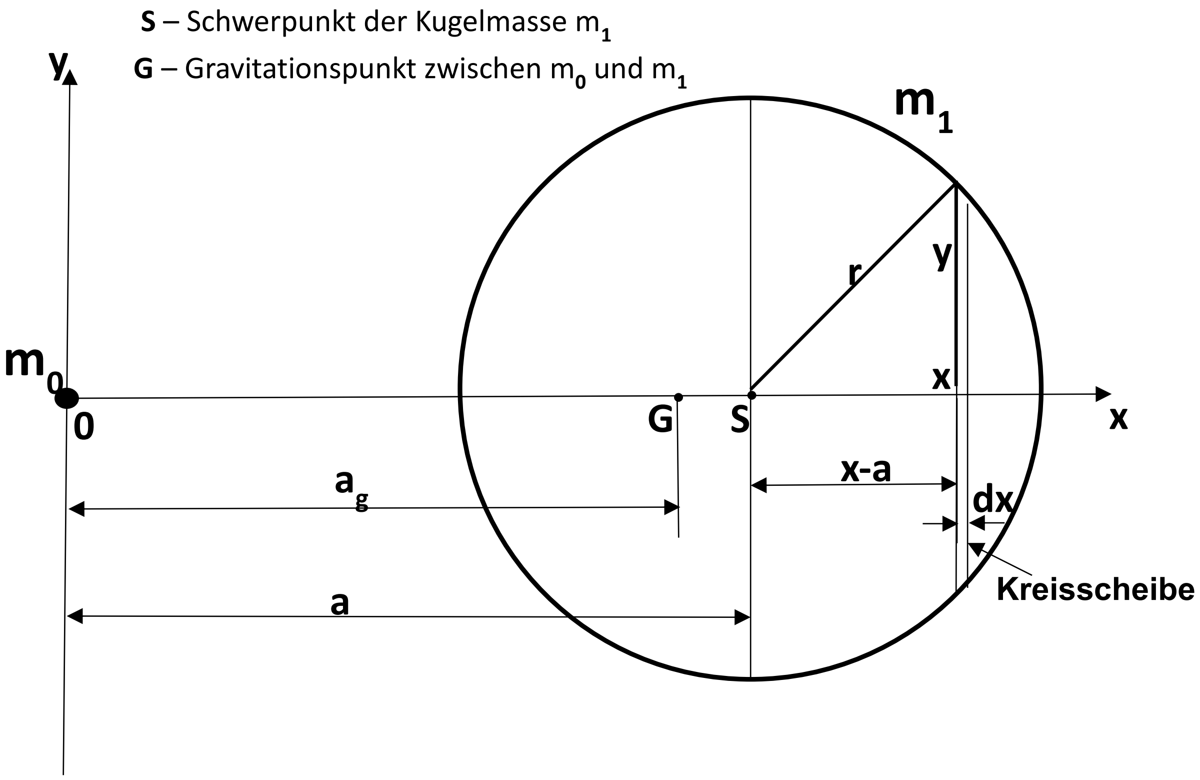

Abb. 1 Punktmasse m_0 und Kugelmasse m_1

Die Querschnittsfläche einer Kreisscheibe ist

$$s = \pi \cdot y^2 \tag{3}$$

mit

$$y^2 = r^2 - (x-a)^2 \;. \tag{4}$$

Daraus nach algebraischer Überarbeitung:

$$s = \pi(r^2 - a^2 + 2ax - x^2) \;. \tag{5}$$

Wie man leicht überprüfen kann, ist die Querschnittsfläche *s* an den Außengrenzen der Masse m_1, heißt, für $x = a - r$ und für $x = a + r$, gleich Null. Für $x = a$ entsteht $s = \pi \cdot r^2$, was zu erwarten war. Außerhalb der Masse m_1, heißt, für $x = a - r - \Delta \;\; und \; x = a + r + \Delta$, worin Δ ein beliebiger positiver Wert ist, entstehen negative Werte für *s*, die keinen physikalischen Inhalt haben.

Es ist für eine Kreisscheibe

$$dm_1 = \delta \cdot s \cdot dx \tag{6}$$

und mit (5)

$$dm_1 = \delta \cdot \pi \cdot (r^2 - a^2 + 2ax - x^2) \tag{7}$$

Die Lösung des Integrals $\int_{a-r}^{a+r} dm_1$ ergibt $\delta \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, was zu erwarten war.

Damit sind die Voraussetzungen für die Integration der Gravitationskraft zwischen m_0 und m_1 vorhanden.

Es kann die summare Gravitation über alle dm_1 berechnet werden. Dazu ist anzusetzen

$$dG = \gamma \cdot \frac{m_0 \cdot dm_1}{x^2} \cdot dx \tag{8}$$

und folglich mit (7)

$$dG = \gamma \cdot \left(\frac{m_0 \cdot \delta \cdot \pi \cdot (r^2 - a^2 + 2ax - x^2)}{x^2}\right) \cdot dx$$

Das Integral über die Grenzen des Kugelradius *r* hat folglich die Form

$$G = \gamma \cdot m_0 \cdot \delta \cdot \pi \cdot \int_{a-r}^{a+r} \left(\frac{r^2 - a^2}{x^2} + \frac{2a}{x} - 1\right) dx \tag{9}$$

mit der Lösung

$$G = \gamma \cdot m_0 \cdot \delta \cdot \pi \cdot \left[\frac{a^2 - r^2}{x} + 2a \ln x - x\right]_{a-r}^{a+r} \tag{10}$$

Nach dem Einsetzen der Grenzen entsteht

$$G = \gamma \cdot m_0 \cdot \delta \cdot \pi \cdot \left[2a \cdot \ln \frac{a+r}{a-r} - 4r\right] \tag{11}$$

Gleichung (11) ist die für nichtpunktförmige Massen abgewandelte Form der Newtonschen Gravitationsgleichung. In dieser Form ist der Gravitationspunkt der Masse m_1 noch nicht erkennbar. Um die Deviation des Gravitationspunktes sichtbar zu machen, muß die Gleichung so umgeformt werden, daß eine invariante Form zur Newtonschen Gleichung (1) hergestellt wird. Dazu wird das Ergebnis der Integration von (6) verwendet, wonach

$$m_1 = \delta \cdot \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3$$

ist. Gleichung (11) wird dazu mit

$$\frac{m_1}{\delta \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3} = 1$$

multipliziert. Es entsteht

$$G = \gamma \cdot m_0 \cdot m_1 \cdot \frac{3}{2r^2} \cdot \left[\frac{a}{r} \cdot \ln\frac{a+r}{a-r} - 2\right]$$

Nach einer weiteren Multiplikation mit

$$\frac{a^2}{a^2} = 1$$

erhält man

$$G = \gamma \cdot \frac{m_0 \cdot m_1}{a^2} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cdot \ln\frac{a+r}{a-r} - 3 \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] \quad (12)$$

In der eckigen Klammer steht das Quadrat des reziproken Wertes des eingangs gesuchten Deviationsfaktors *f,* mit dem der Wert der Deviation des Gravitationspunktes gemäß (2) berechnet werden kann, heißt

$$f^2 = \frac{1}{\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cdot \ln\frac{\frac{a}{r}+1}{\frac{a}{r}-1} - 3 \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^2} \quad (13)$$

Hierin ist zu erkennen, daß der Deviationsfaktor *f* vom Verhältnis der Distanz zum Radius der Masse m_1 abhängig ist. Nennt man dieses Verhältnis *k,* so findet man schlußendlich

$$f = \frac{1}{k \cdot \sqrt{3 \cdot \left(\frac{k}{2}\ln\frac{k+1}{k-1} - 1\right)}} \quad (14)$$

Bei großen Werten von *k* geht *f* gegen 1:

$$\lim_{k\to\infty} f = 1 .$$

Das bedeutet, daß die Deviation für große Verhältniswerte von Distanz $m_0 - m_1$ zum Radius der Masse m_1 vernachlässigbar klein wird, so daß in Gleichung (1) die Verwendung der Schwerpunktedistanz zu sehr genauen Werten für die Gravitationskraft führt.

Für kleine Werte von *k* entstehen nichtvernachlässigbare Deviationsgrößen, die bei der Berechnung der Gravitationskraft Berücksichtigung finden müssen.

Der Grenzfall der Berührung der Massen m_0 und m_1 (heißt, $k = 1$) kann mit der angewendeten Methode nicht behandelt werden, er führte zu einer unendlichen Gravitation. Das ist damit erklärbar, daß die für die Berechnung angenommene Vereinigung der Massen entweder im Schwerpunkt oder im Gravitationspunkt in der Realität nicht existieren kann. Massen sind nicht punktförmig, stets nehmen sie in ein Raumgebiet *V* ein. Die Annahme $V = 0$ bedeutete eine unendliche Dichte. Dies entspräche einer Singularität, deren Existenz umstritten ist. In Tabelle 1, die mit Excel entwickelt wurde, wird das in den letzten Zeilen der ausgewählten Bereiche sichtbar, in denen keine Werte ausgewiesen sind.

Diese nachfolgende Tabellendarstellung (Tabelle 1) der Beziehungen zwischen *a*, *r*, *k* und *f* zeigt die Größenordnung und die praktische Bedeutung der Deviation. Man kann erkennen, daß unter kosmischen Maßstäben, in denen *k* in der Regel sehr viel größer als 100 ist, keine Notwendigkeit ihrer Berücksichtigung besteht. Die Deviation ist vernachlässigbar klein. In der

Nähe der Masse m_1 nimmt die Deviation aber Werte an, die nicht vernachlässigt werden können.

In einigen Quellen findet man zum Beispiel Methoden für die Berechnung der Erdmasse unter Verwendung des Gravitationswertes einer in Erdnähe befindlichen anderen Masse, bei der für die Berechnung dieser Gravitation der Erdradius verwendet wird, das bedeutet, es wird der Schwerpunkt mit dem Gravitationspunkt gleichgesetzt. Das ist nicht richtig, weil für die in Erdnähe befindliche Masse eine signifikante Deviation Berücksichtigung finden muß (Tabelle 2).

a	*r*	*k*	*f*		*a*	*r*	*k*	*f*		*a*	*r*	*k*	*f*
1000,00000	1,00000	1000,00000	1,00000		2,00000	1,00000	2,00000	0,91927		1,00100	1,00000	1,00100	0,34441
900,00000	1,00000	900,00000	1,00000		1,90000	1,00000	1,90000	0,90974		1,00090	1,00000	1,00090	0,34128
800,00000	1,00000	800,00000	1,00000		1,80000	1,00000	1,80000	0,89833		1,00080	1,00000	1,00080	0,33787
700,00000	1,00000	700,00000	1,00000		1,70000	1,00000	1,70000	0,88448		1,00070	1,00000	1,00070	0,33412
600,00000	1,00000	600,00000	1,00000		1,60000	1,00000	1,60000	0,86738		1,00060	1,00000	1,00060	0,32993
500,00000	1,00000	500,00000	1,00000		1,50000	1,00000	1,50000	0,84583		1,00050	1,00000	1,00050	0,32518
400,00000	1,00000	400,00000	1,00000		1,40000	1,00000	1,40000	0,81789		1,00040	1,00000	1,00040	0,31962
300,00000	1,00000	300,00000	1,00000		1,30000	1,00000	1,30000	0,78026		1,00030	1,00000	1,00030	0,31284
200,00000	1,00000	200,00000	0,99999		1,20000	1,00000	1,20000	0,72637		1,00020	1,00000	1,00020	0,30397
100,00000	1,00000	100,00000	0,99997		1,10000	1,00000	1,10000	0,63909		1,00010	1,00000	1,00010	0,29038
0,00000	1,00000	0,00000	#ZAHL!		1,00000	1,00000	1,00000	#DIV/0!		1,00000	1,00000	1,00000	#DIV/0!
100,00000	1,00000	100,00000	0,99997		1,10000	1,00000	1,10000	0,63909		1,00010	1,00000	1,00010	0,29038
90,00000	1,00000	90,00000	0,99996		1,09000	1,00000	1,09000	0,62681		1,00009	1,00000	1,00009	0,28847
80,00000	1,00000	80,00000	0,99995		1,08000	1,00000	1,08000	0,61346		1,00008	1,00000	1,00008	0,28638
70,00000	1,00000	70,00000	0,99994		1,07000	1,00000	1,07000	0,59882		1,00007	1,00000	1,00007	0,28406
60,00000	1,00000	60,00000	0,99992		1,06000	1,00000	1,06000	0,58256		1,00006	1,00000	1,00006	0,28145
50,00000	1,00000	50,00000	0,99988		1,05000	1,00000	1,05000	0,56425		1,00005	1,00000	1,00005	0,27845
40,00000	1,00000	40,00000	0,99981		1,04000	1,00000	1,04000	0,54318		1,00004	1,00000	1,00004	0,27491
30,00000	1,00000	30,00000	0,99967		1,03000	1,00000	1,03000	0,51810		1,00003	1,00000	1,00003	0,27054
20,00000	1,00000	20,00000	0,99925		1,02000	1,00000	1,02000	0,48649		1,00002	1,00000	1,00002	0,26472
10,00000	1,00000	10,00000	0,99699		1,01000	1,00000	1,01000	0,44127		1,00001	1,00000	1,00001	0,25557
0,00000	1,00000	0,00000	#ZAHL!		1,00000	1,00000	1,00000	#DIV/0!		1,00000	1,00000	1,00000	#DIV/0!
10,00000	1,00000	10,00000	0,99699		1,01000	1,00000	1,01000	0,44127		1,000010	1,00000	1,000010	0,25557
9,00000	1,00000	9,00000	0,99628		1,00900	1,00000	1,00900	0,43523		1,000009	1,00000	1,000009	0,25427
8,00000	1,00000	8,00000	0,99529		1,00800	1,00000	1,00800	0,42873		1,000008	1,00000	1,000008	0,25283
7,00000	1,00000	7,00000	0,99384		1,00700	1,00000	1,00700	0,42163		1,000007	1,00000	1,000007	0,25122
6,00000	1,00000	6,00000	0,99160		1,00600	1,00000	1,00600	0,41380		1,000006	1,00000	1,000006	0,24941
5,00000	1,00000	5,00000	0,98787		1,00500	1,00000	1,00500	0,40501		1,000005	1,00000	1,000005	0,24732
4,00000	1,00000	4,00000	0,98093		1,00400	1,00000	1,00400	0,39488		1,000004	1,00000	1,000004	0,24482
3,00000	1,00000	3,00000	0,96563		1,00300	1,00000	1,00300	0,38276		1,000003	1,00000	1,000003	0,24172
2,00000	1,00000	2,00000	0,91927		1,00200	1,00000	1,00200	0,36727		1,000002	1,00000	1,000002	0,23753
1,00000	1,00000	1,00000	#DIV/0!		1,00100	1,00000	1,00100	0,34441		1,000001	1,00000	1,000001	0,23086
0,00000	1,00000	0,00000	#ZAHL!		1,00000	1,00000	1,00000	#DIV/0!		1,000000	1,00000	1,000000	#DIV/0!

Tabelle 1: Tabellendarstellung des Deviationsfaktors f als Funktion von k:

Kosmische Beispiele:					Deviation für eine Punktmasse in Erdnähe		
	Durchmesser in km	**max**	**min**		***k***	**über d. Erde**	**f**
Sonne	1.392.684	1.392.814	1.392.554		1,00015696	1 km	0,29901
Erde	12.742	12.756	12.714		1,00007848	500 m	0,28604
Mond	3.476	keine Abplattung			1,00003139	200 m	0,27122
	Distanz				1,00001570	100 m	0,26141
Sonne-Erde	149.600.000	152.100.000	147.100.000		1,00000785	50 m	0,25259
Erde-Mond	371.500	384.000	359.000		1,00000314	20 m	0,24220
					1,00000157	10 m	0,23514
k		***k***			1,00000078	5 m	0,22866
29	Erde - Mond	107			1,00000031	2 m	0,22086
107	Sonne - Erde	11.741			1,00000016	1 m	0,21546
					1,00000008	0,5 m	0,21044
					1,00000002	0,1 m	0,20002
					1,00000000	0 m	#DIV/0!

Tabelle 2: Zahlenbeispiele in kosmischen Größen und in Erdnähe

Die vorgestellte Berechnung ist ein theoretischer Ansatz, der zeigt, daß die für die Berechnung der Gravitation angenommene Vereinigung der Massen in ihren Schwerpunkten nicht allgemeingültig ist, sondern in Abhängigkeit vom Verhältnis der Distanz der gravitierenden Massen zur ihren Größen betrachtet werden muß. Die Homogenität der Dichte der Massen ist hierbei ein im Kosmos äußerst selten vorhandener Idealfall.

Für die Praxis, zum Beispiel bei Berechnungen der Gravitationswerte der Erde mit in der Nähe befindlichen Massen, müssen weiterführende Berechnungen erfolgen, da die Dichte der Erde nicht homogen ist. Nach PREM (*Preliminary Reference Earth Model*), einem von Adam M. Dziewonski und Don L. Anderson im Jahre 1981 entwickelten Referenzmodell für seismische Geschwindigkeiten, Dichte, Druck und weitere physikalische Parameter im Erdinneren, ist die Dichte der Erde im inneren Erdkern um einen Faktor bis zu 13 größer als in den äußeren Schichten (Abb. 2).

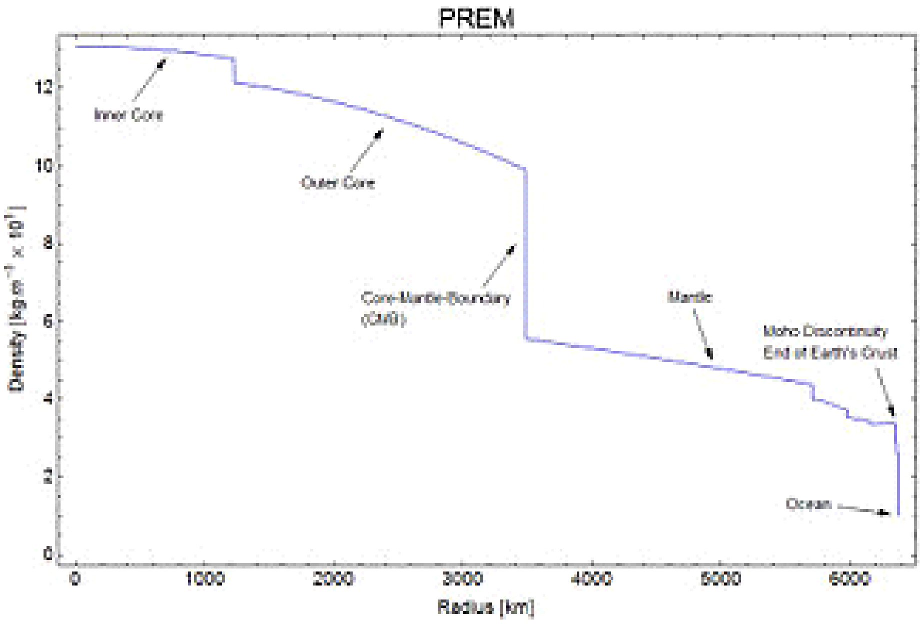

Abb. 2 Dichte der Erde in Abhängigkeit von der Tiefe

Das ist damit erklärbar, daß sich im Prozeß der Entstehung der Erde in ihrer flüssigen Phase durch ihre innere Gravitation die schweren Elemente (Eisen, Nickel) in das Zentrum bewegt haben (gravitative Segretation). Erwartungsgemäß führt das zu einer Verkleinerung der Deviation, weil nach diesem Modell in 17% des inneren Erdvolumens 33% der gesamten Erdmasse enthalten sind.

Die Ausführung der für die Erde relevanten Berechnungen der Deviation ist Gegenstand einer nachfolgenden Arbeit, zu der vorab noch zielführende Recherchen angestellt werden müssen.