

<https://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/mathematik-bizzarr-summe-aller-natuerlichen-zahlen-ist-negativ-a-944534.html>:

Gilt in der Physik eine „andere“ Mathematik?
Nachzeichnung von Dr. Manfred Pohl

Ich zitiere obigen Artikel in schwarzer Schrift und kommentiere ihn in roter Schrift

Mathematik bizarr Summe aller natürlichen Zahlen ist -1/12

Mathematik kann unlogisch wirken. Das demonstrieren zwei Physiker in einem Video: Sie addieren unendlich viele natürliche Zahlen - und kommen auf ein negatives Ergebnis. So absurd das klingt, in der Stringtheorie wird mitunter genau so gerechnet.

Man kann so nicht rechnen. Wenn man bei der Addition unendlich vieler natürlicher Zahlen auf ein negatives endliches Ergebnis kommt, hat man mit Sicherheit bei den Berechnungen an mindestens einer Stelle das logische Denken verlassen und ist einem Trugschluß aufgesessen. Wenn mit diesen Fehlschlüssen eine Theorie begründet wird, kann man von ihr nicht erwarten, daß sie die Realität abbildet.

Ich untersuche dieses Herangehen anhand der im Beitrag verwendeten Beispiele und zeige die Stellen, an denen die Autoren auf Grund logischer Fehlschlüsse irren.

Von Holger Dambeck

Wussten Sie, dass eine Katze neun Schwänze hat? Das lässt sich sogar mathematisch sauber beweisen – in nur drei Sätzen:

1. Keine Katze hat acht Schwänze.
2. Eine Katze hat einen Schwanz mehr als keine Katze.
3. Daraus folgt sofort: Eine Katze hat $8 + 1 = 9$ Schwänze.

Diese Ableitung ist bereits im ersten Satz falsch. Daß keine Katze 8 Schwänze hat, ist für die Nachfolgerechnung irrelevant. Von Interesse für die Berechnung ist, wie viele Schwänze null (0) Katzen haben. „Keine Katze“ hat eine andere Bedeutung als „null (0) Katzen“. „Keine Katze“ und „null (0) Katzen“ sind verschiedene verbale Sentenzen, die nicht zur gleichen Aussage führen können. Man kann zu „Keine Katze“ nicht eine (1) Katze addieren, weil „Keine Katze“ nicht die Eigenschaft eines Summanden hat, sie ist kein addierbarer Wert. Wohl aber kann man zu „null (0) Katzen“ eine (1) Katze addieren. Das sind zwei verschiedene Vorgänge. Die erste Aussage ist keine Summe, „Keine Katze hat 8 Schwänze“ heißt: Es gibt keine Katze, die 8 Schwänze hat. Das ist eine andere Aussage, wie „null (0) Katzen“, die den Summenwert 0 haben, folglich in der Summe nur „0 Schwänze“ haben können.

„Null (0) Katzen“ haben null (0) Schwänze, weil in diesem Fall Katzen nicht vorhanden sind. Für die Existenz von Schwänzen ist die Existenz mindestens einer (1) Katze notwendig und hinreichend. Das heißt: Null (0) Katzen haben null (0) Schwänze, nicht 8 Schwänze (oder n Schwänze).

Der zweite Satz ist aus demselben Grund falsch. Es muß heißen: Eine (1) Katze hat einen (1) Schwanz „mehr als null (0) Katzen“, nicht „...mehr als keine Katze“. Folglich hat eine (1) Katze einen (1) Schwanz, sie hat nämlich einen (1) Schwanz mehr als null (0) Katzen, die null (0) Schwänze haben.

Die Schlußfolgerung im dritten Satz ist deshalb ungültig.

Somit ist die obige Herleitung nicht überzeugend, weil sie eine Fehldeutung enthält. Der Begriff „Keine Katze“ wird falsch angewendet, indem er mit „null (0) Katzen“ als identisch interpretiert wird. Diese Identität ist nicht vorhanden.

Auf dieselbe Art ließe sich "beweisen", dass eine Katze sieben oder auch zwölf Schwänze hat.

Der Fehler ist derselbe, die Ableitung aus demselben Grund falsch.

Doch absurde Beweise finden sich nicht nur auf Webseiten, die Mathe-Witze sammeln. **Dort gehören sie hin.** Sie stehen auch in seriösen Fachbüchern, wie zwei Physiker der University of Nottingham berichten. **Aus letzteren muß man sie entfernen.**

Den beiden Forschern macht es sichtlich Spaß, das absurde Ergebnis auf überzeugende Weise herzuleiten. Sie zeigen, dass die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis unendlich nicht etwa unendlich, sondern $-1/12$ ist. Hier noch einmal ausgeschrieben:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots = -1/12$$

"Dieses Ergebnis wird in vielen Gebieten der Physik benutzt", erklärt Copeland. Es sei entscheidend, um beispielsweise auf die 26 Dimensionen der Stringtheorie zu kommen, in der Forscher versuchen, alle physikalischen Theorien zusammenzuführen. **Sollte die Stringtheorie auf diesen Irrtümern beruhen, kann sie allein schon aus diesem Grund nicht richtig sein.**

Drei Summen führen zum absurden Ergebnis

Die Beweisführung ist etwas länger als bei der Katze mit neun Schwänzen - aber kaum komplizierter. Sie basiert auf drei Summen, die nacheinander berechnet werden.

Alle drei Summen bestehen aus unendlich vielen Summanden:

$$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

$$C = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

Beginnen wir mit A. Wie groß ist diese Summe? Mathematiker würden vielleicht sagen, dass man das nicht ausrechnen kann. Denn wenn wir das Aufsummieren an einer beliebigen Stelle unterbrechen, kommt entweder 0 oder 1 heraus.

Wenn wir abbrechen, ist es keine Summe von unendlich vielen Summanden, sondern eine endliche Summe aus n Summanden. Die Bedingung in dem Satz vor den drei Summen ist damit aufgehoben. Für ungerade n ist die Summe 1, für gerade n ist sie 0. Lassen wir nun n gegen ∞ gehen, ist die Summe nicht bestimmbar, weil unbekannt ist, ob n gerade oder ungerade ist.

Das Problem lässt sich jedoch pragmatisch umschiffen, wie es Physiker gern tun: A kann 0 oder 1 sein, beide Varianten sind quasi gleich wahrscheinlich. Also ist die Summe der Mittelwert aus 0 und 1: **A = 1/2.**

Das ist kein existierender Mittelwert. Eine solche Mittelwertbildung ist nicht ausführbar. Es liegen nicht mehrere Werte vor, aus denen man einen Mittelwert bestimmen kann, sondern immer nur einer: Der Wert an der Abbruchstelle. Bei Fortführung der Rechnung bis ins Unendliche gibt es stets nur ein (1) Ergebnis. Es kann abhängig von der Abbruchstelle 0 oder 1 sein, an keiner Abbruchstelle ist es $1/2$. Im Unendlichen ist der Wert nicht definiert, weil nicht bestimmbar ist, ob n gerade oder ungerade ist. Diese Mittelwertberechnung ist falsch.

Weiter geht es mit B:

Erst müssen wir feststellen, wie groß B ist. Bei Abbruch ist $B = \pm n$ in Abhängigkeit von der Abbruchstelle. Im Unendlichen ist nicht bestimmbar, ob $B = +\infty$ oder $B = -\infty$ ist, weil n nicht bestimmbar ist.

Man addiert zu B sich selbst und erhält $2 \cdot B$. Wenn man die beiden Summen geschickt untereinander schreibt und dabei die Summanden in der unteren Zeile um eine Position nach rechts schiebt, vereinfacht das die Rechnung: Addieren Sie die untereinander stehenden Zahlen, wie -2 und $+1$ oder rechts daneben $+3$ und -2 - das Ergebnis ist entweder $+1$ oder -1 :

Das ist nicht richtig, weil nicht zu Ende gedacht wurde. Mit dieser Methode entsteht:

$$\begin{array}{r} B = +1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 \pm \dots \pm n \\ B = + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 \dots \mp (n-1) \pm n \\ \hline B+B = +1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots \pm 1 \mp n \end{array}$$

Das aber ist $(1 - n)$ oder $(1 + n)$, abhängig vom Abbruchpunkt, im Unendlichen ist es $\pm \infty$.

Man sieht sofort, dass $2 \cdot B = A = 1/2$ und damit $B = 1/4$ ist.

Das sieht man sofort gerade nicht, weil

1. $A \neq 1/2$ und deshalb
2. $2B \neq A$ ist, denn $B = (1 \pm n)$, abhängig vom Abbruchpunkt, woraus erkennbar ist: $B \neq 1/4$.

Im letzten Schritt muss von C – der Summe, die wir berechnen wollen – die Summe B abgezogen werden.

Auch hier ist das geschickte Untereinanderschreiben und Addieren der Zahlen entscheidend. Beachten Sie dabei auch das Minuszeichen vor der Klammer in der zweiten Zeile.

Ich schreibe dies wie angegeben nieder und führe die gliedweisen Operationen aus:

$$\begin{array}{r} C = +1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \dots \\ -B = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - \dots \\ \hline C - B = 0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + 0 + 16 + \dots \end{array}$$

Beim Ergebnis $4 + 8 + 12 + \dots$ können wir nun den Faktor 4 ausklammern:

$$C - B = 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots)$$

Der Ausdruck in der Klammer entspricht genau der gesuchten Summe C.

Damit erhalten wir:

$$C - B = 4 \cdot C$$

In der Tat erhält man, daß $C - B = 4 \cdot C$ ist, aber wir denken daran: $B \neq 1/4$ und $A \neq 1/2$

Nach dem Umstellen nach C ergibt sich:

$$3 \cdot C = -B$$

$$C = -B/3$$

Wir wissen bereits, dass $B = 1/4$ ist,

das ist der Fehler, das nämlich wissen wir nicht, wir haben einen falschen Wert:

$$B \neq 1/4, \text{ denn } B = (1 \pm n),$$

und damit steht fest:

$$C = -1/12.$$

Das steht damit eben nicht fest, denn wegen $B = (1 \pm n)$ wäre allenfalls

$$C = (n + 1)/3 \text{ oder } C = (n - 1)/3.$$

Das aber ist auch nicht korrekt, denn B ist im Unendlichen nicht bestimmbar weil n nicht angegeben werden kann. Korrekt ist: Für $n \rightarrow \infty$ geht $C \rightarrow \infty$.

Halten wir uns an die Realität und rechnen arithmetisch korrekt.

C ist die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n.

Nennen wir sie C_n , so ist diese Summe

$$C_s = \frac{(n+1) \cdot n}{2} \text{ und} \quad (T1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_s = \infty. \quad (T2)$$

Auf die Herleitung kann ich verzichten, die Formeln sind allgemein bekannt. Die mit dem suspekten „Beweis“ abgeleitete Lösung $C_s = -1/12$ kann mit ihnen nicht nachgewiesen werden.

Wer immer noch glaubt, dass es sich um einen cleveren Scherz handelt, werfe einen Blick auf die Webseite von [Terence Tao, einem der besten Zahlentheoretiker weltweit](#). "Die Formel ergibt keinen Sinn, wenn man unendliche Summen auf traditionelle Weise berechnet", [schreibt Tao](#). Aber hier wird ja auch anders gerechnet.

Man kann nicht „anders“ als nach den Regeln der Arithmetik rechnen, sonst verletzt man die Gesetze der Logik, was den Erhalt richtiger Ergebnisse ausschließt. Ich bin nicht überzeugt, daß Terence Tao solche Vorgehensweisen ernst nimmt.

Der Physiker Tony Padilla wird noch deutlicher: "Das sieht aus wie mathematischer Hokusfokus - aber es ist keiner. Wir wissen es, weil diese Art von Summen in der Physik auftaucht."

Wo? Das müßte Tony Padilla hier schon sagen. Ich bin Physiker seit mehr als 60 Jahren, mir ist keine Rechnung begegnet, die von T1 und T2 abweicht.

Padilla weiß natürlich, was passiert, wenn man die Summe aller natürlichen Zahlen auf einem Supercomputer berechnet: Das Ergebnis sei "eine sehr große Zahl", weil man ja nicht unendlich viele Zahlen addieren könne. Wenn man jedoch unendliche Summen nur für endlich viele Summanden berechne, komme man auf kontraintuitive Ergebnisse wie $-1/12$.

Das ist logisch nicht erklärbar, weil die Aussage Unsinn ist. Die Absicht, „*unendliche Summen nur für endlich viele Summanden*“ berechnen zu wollen, ist ein logisches Dilemma. Die Berechnung einer beliebigen Summe aus endlich vielen Summanden ist immer eine endliche Summe. Unendliche Summen können nur als Grenzwert bestimmt werden. Ein Grenzwert ist aber mit oben genannter Absicht nicht berechnet worden. Nur wenn man in der oben beschriebenen Weise die Logik abschafft, können diese Verirrungen entstehen. Die Ableitung ist also doch nur ein mathematischer Hokusfokus.