

Bewertung der Elektronenstrahl-Auslenkungen durch eine Spule bei Anwendung der Weber-Ritz- und der Maxwell-Lorentz Elektrodynamik

Ray T. Smith, Fred P. M. Jjunju und Simon Maher ^{*)}

Erhalten am 11. Februar 2015, angenommen 3. April 2015, Geplant 23. April 2015

^{*)} Ansprechpartner ist der Autor Simon Maher (s.maher@liv.ac.uk).

Die Autoren gehören zur Abteilung für Elektrotechnik und Elektronik, Universität Liverpool, Liverpool L69 3GJ, UK.

Übersetzung aus dem Englischen mit der freundlichen Genehmigung Elektromagnetik-Akademie JPIER, University of Illinois:

Dr. Manfred Pohl, Deutschland

Netz: www.unipohl.de

Mail: unipohl@aol.com

Kurzfassung

Die Ablenkung von Strahlen geladener Teilchen durch elektrische und/oder magnetische Felder basiert immer auf dem zentralen Feldansatz im Zusammenhang mit Maxwell-Lorentz, eingebunden in die Lorentzsche Kraftgleichung. Hier präsentieren wir eine alternative Berechnungsmethode auf der Grundlage der Kraftformel von Weber-Ritz, die nicht direkt die Feldeinheiten E und B beinhaltet. In dieser Studie bewerten wir die Ablenkung eines Elektronenstrahls durch eine lange gleichstromführende Magnetspule, die mittig über dem Strahl angeordnet ist. Das Experiment hat einen gewissen Einfluß auf den Aharonov-Bohm-Effekt, in welchem unsere Berechnungen zeigen, daß auch bei sehr langen Elektromagneten die klassische Kraft auf den Strahl endlich bleibt. Dennoch bezieht sich die Standardinterpretation des Effektes auf die Quantenmechanik und das Vektorpotential. Experimentelle Messungen der Auslenkungen des Elektronenstrahls wurden mit drei Spulen gemacht, 0,25 m, 0,50 m und 0,75 m lang; Jede Spule ist doppelt mit derselben Wicklungsdichte gewickelt (2600 Windungen pro Meter) und führt denselben Strom von 5,0 A Gleichstrom. Unsere Ergebnisse zeigen, daß innerhalb der experimentellen Fehlergrenzen beide Theorien, die Weber-Ritz- und Maxwell-Lorentz-Theorie, für die längeren Spulen mit den Messungen korrelieren. Hingegen im Falle der kürzeren Spule führt der Mangel an Gleichförmigkeit des magnetischen Feldes zu signifikanten Fehlern bei der Berechnung der Strahlablenkung durch die Lorentz-Kraft. Im Gegensatz dazu erhält man in einer Weber-Ritz-Berechnung einen genauen Wert der Strahlablenkung durch Gleichsetzen des Impulses der nichtgleichförmigen Strahlkraft mit der vertikalen Impulsänderung des Elektrons. Dies ist ein grundsätzlich anderer Ansatz unter Benutzung der statistischen Addition der Kräfte, die auf den Strahl bezüglich der Relativgeschwindigkeiten zwischen den sich bewegenden Elektronen wirken und beinhaltet eine direkte Berechnung der vertikalen Kraft auf den Strahl aufgrund des rotierenden Magnetstroms. Dieses Verfahren hat deutliche Vorteile im Sinne der Sparsamkeit; das heißt, es finden weder direkt die Feldeinheiten E und B Eingang, noch der Streufluß der Magnetspule oder das Vektorpotential.

1. EINLEITUNG

Das wissenschaftliche Paradigma, das elektromagnetische Physik in den letzten hundert Jahren beherrscht hat, ist die feststehende Erklärung der Feldtheorie mit den Theorien von Maxwell-Lorentz und später ergänzt mit Einsteins spezieller Relativitätstheorie. In fast allen aktuellen Texten basiert die Berechnung der Elektronenstrahl-Auslenkungen auf dem Gesetz von Lorentz, das vor über einem Jahrhundert vorgeschlagen wurde und sich auf die Feldvektoren \mathbf{E} (elektrisch) und \mathbf{B} (magnetisch) bezieht, $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, wobei \mathbf{v} die Geschwindigkeit der Ladung e relativ zum Versuchssystem ist. Es ist jedoch gut bekannt, daß solch ein lineares Gesetz scheitert, wenn es auf Elektronenstrahlen angewendet wird, die sich mit einem signifikanten Teil der Lichtgeschwindigkeit bewegen. Strahlflugbahnen müssen dann durch den relativistischen Faktor γ korrigiert werden, wobei $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ und $\beta = v/c$. Die Rechtfertigung für diese Korrektur wird immer der speziellen Relativität zugeschrieben (Lorentz-Transformation) als eine Massenzunahme mit der Geschwindigkeit der Vorhersage ($\mathbf{m} = m_0 \gamma$). Wenn jedoch die Lorentzkraft der älteren (Pre-Maxwellschen) Fernwirkungs-Theorie von Weber oder Ritz gegenübergestellt wird, entsteht die Frage, welche Formulierung ist von grundlegender Bedeutung, Maxwell-Lorentz oder Weber-Ritz?

Nun beobachten wir in Bezug auf das Lorentz-Kraftgesetz, während die Kraft auf eine Ruheladung von E abhängt, wird die Kraft auf eine bewegte Ladung durch einen Term erhöht, der dem Gesetz von

Biot-Savart entspricht, das nur für einen geschlossenen Nullstrom nachgewiesen ist. Lorentz selbst bemerkte, daß „wir jetzt die beiden in der Gleichung gezeigten Wege verbinden und über die direkten Ergebnisse des Experiments hinausgehend von der Annahme ausgehen, daß im Allgemeinen die beiden Kräfte zugleich existieren.“ [1] Aus diesen Gründen hat O’Rahilly [1] die These aufgestellt, daß das Kraftgesetz von Lorentz nicht als fundamental betrachtet werden sollte. Eine logischere Darstellung ist in den älteren (pre-Maxwellschen) Fernwirkungs-Theorien, verbunden mit Gauß, Weber und Ritz, gefunden worden. Solche Theorien betreffen nur Kräfte zwischen bewegten Ladungen in Relativbewegung mit elektrischen Kräften. Ein kurzer Überblick über eine solche Fernwirkungs-Theorie ist nun gegeben.

2. Weber-Ritz: Arten von Fernwirkungstheorien

Die Weber-Ritz Theorien haben eine wesentliche zugrundeliegende Einfachheit. Alle elektromagnetischen Aktionen werden unter einer einzigen Kraftformel zwischen bewegten Ladungen zusammengefaßt. Die Kraft ist logisch angenommen zeitgleich abhängig von der Entfernung (r) zwischen den Ladungen, ihrer relativen Geschwindigkeit (\dot{r}) und ihrer relativen Beschleunigung (\ddot{r}). Die Relativgeschwindigkeitsterme beschreiben Kräfte zwischen stromdurchflossenen Leitern und Magneten einschließlich der elektromagnetischen Bewegungsinduktion, während sich die Beschleunigungsterme auf die Transformatorinduktion beziehen [2]. Außerdem verringert sich die Kraft auf das Coulomb-Gesetz für ruhende Ladungen. In der Regel beinhaltet jede Kraftberechnung eine numerische Berechnung von elementaren Kräften zwischen den statistischen Zuständen bewegter Ladungen mit Hilfe der Newtonschen Mechanik und dem Überlagerungsprinzip.

Aus historischer Perspektive hat Wilhelm Weber bereits 1848 eine Kraftgleichung zweiter Ordnung vorgeschlagen, in der die Kraft zwischen elektrischen Ladungen, e , e' in Abhängigkeit von ihrer relativen Geschwindigkeit und ihrer relativen Beschleunigung gegeben ist als

$$F_r = \frac{ee'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \left[1 + \frac{r\ddot{r}}{c^2} - \frac{\dot{r}^2}{2c^2} \right] \quad (1)$$

wobei F_r die Kraft entlang r ist und \hat{r} ist der Einheitsvektor entlang r .

Etwa 50 Jahre später (1908) entwickelte Walther Ritz eine Emissionstheorie der elektromagnetischen Wirkung, deren Formelausdrücke denen von Weber sehr ähnlich sind. In einem modernen Kontext hat die Arbeit von Weber durch Assis [3 - 6] eine bedeutende Weiterentwicklung erfahren, während die von Ritz umfangreiche Behandlung in der Arbeit von O’Rahilly erhalten hat [1]. Die Theorien von Weber und Ritz sind weitgehend unbekannt oder werden ignoriert. Oft geht dies zum Teil auf Fehlinformation zurück, daß solche Theorien falsch seien, weil sie nicht die Ableitung der Maxwell-Gleichungen ermöglichen. Jedoch würde ein sorgfältiges Lesen von [1] oder [3] zeigen, daß eine solche Ansicht nicht korrekt ist, wie in [7] zusammengefaßt.

Geht man von der Weberkraft aus (Gl. (1)) und folgt O’Rahilly [1, Seite 525], wenn \mathbf{v} und \mathbf{v}' die Geschwindigkeiten der Ladungen e und e' , sind, die sich im Abstand r voneinander befinden, und \mathbf{v}_r , \mathbf{v}'_r die jeweiligen Geschwindigkeiten entlang r sind, dann ist die Relativgeschwindigkeit, \mathbf{u}_r entlang r

gegeben als $u_r = \frac{dr}{dt} = v_r - v'_r$. Außerdem ist

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \sum (v_r - v'_r) \cdot (x - x')/r = (u^2 - u_r^2)/r + (f_r - f'_r),$$

worin u die tatsächliche Relativgeschwindigkeit zwischen e und e' ist und $(f_r - f'_r)$ die relative Beschleunigung entlang r . Somit kann Webers Kraftgleichung nun in Abhängigkeit von den relativen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ausgedrückt werden als

$$F_r(W) = \frac{ee'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \left[1 + \frac{u^2}{c^2} - \frac{3u_r^2}{c^2} + \frac{r(f_r - f'_r)}{c^2} \right]. \quad (2)$$

Bei Gegenüberstellung zu O’Rahilly [1, Seite 520] ergibt sich die Formel von Ritz, basierend auf der Emissionstheorie, als

$$F_r(R) = \frac{ee'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[\left(1 + \frac{3-\lambda}{4} \cdot \frac{u_r^2}{c^2} - \frac{3(1-\lambda)}{4} \cdot \frac{u_r^2}{c^2} + \frac{r(f_r - f_r')}{c^2} \right) \hat{r} - \frac{(1-\lambda)}{2} \cdot \frac{uu_r}{c^2} + \frac{rf_r}{2c^2} \right]. \quad (3)$$

Es ist zu beachten, daß in der Ritz-Formulierung λ eine dimensionslose Konstante ist, deren Wert aus den Experimentaldaten ermittelt wurde. Wenn die Beschleunigungsglieder ignoriert werden, also $\lambda = -1$ ist, sind die Ausdrücke nach Weber und Ritz dieselben. Deshalb ist es angezeigt, unsere grundsätzliche Untersuchung an die Webergleichung zu binden.

$$F_r(W) = \frac{ee'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \left[1 + \frac{u^2}{c^2} - \frac{3u_r^2}{2c^2} \right] \quad (4)$$

Die Formel ist nun angewendet auf den Fall eines Elektronenstrahls, der die zentrale Ebene einer langen gleichstromführenden Spule kreuzt.

3. Die Kraft auf einen Elektronenstrahl, der eine lange gleichstromdurchflossene Spule durchläuft

3.1. Berechnung für eine Einzelwindung

Abb. 1 zeigt eine kreisförmige Stromschleife, den Radius a im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems $O(x, y, z)$. Q ist ein Punkt auf dieser Schleife, der ein Leitungselement $a\delta\theta$ enthält, \mathbf{v}' ist die Elektronendriftgeschwindigkeit für einen stationären Schleifenstrom I , wobei $I = nAv'e$ ist und n ist die Dichte der freien Elektronen, A ist die Querschnittsfläche des Leiters und e ist die Elektronenladung. Ein Elektronenstrahl mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} ist parallel zur x -Achse gerichtet und P ist ein beliebiger Punkt auf dem Strahl mit den Koordinaten (b, h, z) . Die Kraft δF entlang r wird nun zwischen den Ladungen e' im Punkt Q berechnet, worin $e' = nA(a\delta\theta)e$ ist und e , das sich im Punkt P befindet, der auf der Basis der Weber-Ritz Kraft von Gleichung (4) berechnet wurde. Dann wird unter Verwendung von $(\delta F_r) \cos \beta$ die Elementarkraft (δF_y) senkrecht auf dem Strahl (d. h. parallel zur y -Achse) bestimmt. Die Integration über die Schleife ergibt dann die Kraft auf das Elektron in P .

Die Winkel, die in die Berechnung eingehen, sind in Abb. 1 als θ , α , β und γ angegeben, wobei:

θ ist der Winkel zwischen OQ und der x -Achse,

α ist der Winkel zwischen $r = QP$ und der x -Achse (\mathbf{v} -Richtung), wobei

$$\cos \alpha = (b - a \cos \theta) / r,$$

β ist der Winkel zwischen $r = QP$ und der y -Achse, wobei $\cos \beta = (h - a \sin \theta) / r$,

γ ist der Winkel zwischen $QT = v'$ und dem Vektor $QP = r$, wobei,

$$\cos \gamma = (b \sin \theta - h \cos \theta) / r$$

$$\text{und } r^2 = a^2 + b^2 + h^2 + z^2 - 2ab \cos \theta - 2ah \sin \theta.$$

Wir erinnern uns, daß die Weber-Ritz-Formel zwischen den Punktladungen e und e' , die sich relativ zueinander bewegen und im Abstand r sind, lautet (Gleichung 4):

$$\delta F_r(W/R) = \frac{ee'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \left[1 + \frac{u^2}{c^2} - \frac{3u_r^2}{2c^2} \right]$$

worin \hat{r} der Einheitsvektor entlang r ist, u ist die Relativgeschwindigkeit zwischen e mit der Geschwindigkeit v und e' mit der Geschwindigkeit v' , u_r ist die Relativgeschwindigkeit zwischen e und e' entlang r . Das ergibt

$$u = v - v' \sin \theta,$$

und weil $v' \ll v$ ist $u^2 = v^2 - 2vv' \sin \theta$.

Ebenso ist $u_r = v \cos \alpha - v' \cos \gamma$ und $u_r^2 = v^2 \cos^2 \alpha - 2vv' \cos \alpha \cos \gamma$ ($v' \ll v$)

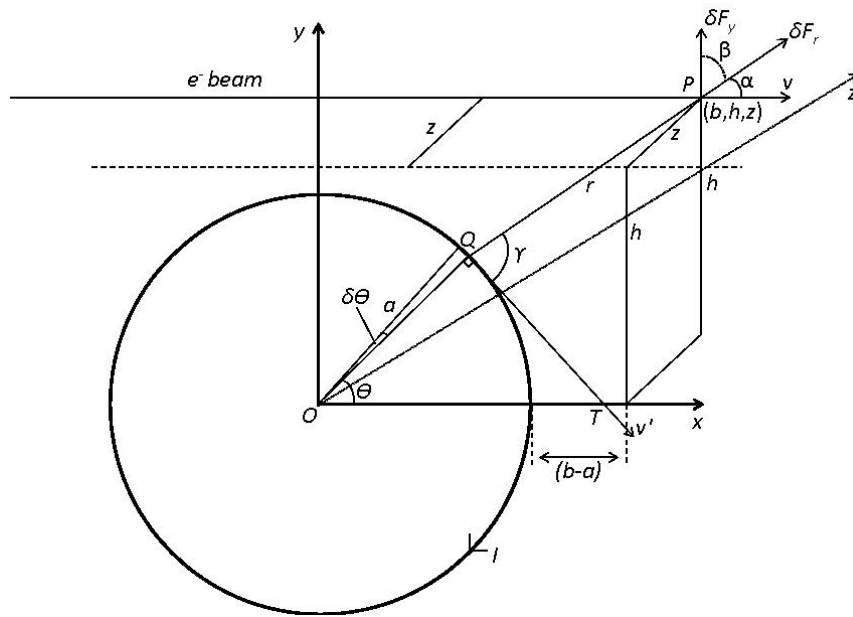


Abb. 1 Die Geometrie einer gleichstromdurchflossenen Schleife im Ursprung des Koordinatensystems in der x - y -Ebene und eines Elektrons, das sich parallel zur x -Achse mit der Geschwindigkeit v bewegt. Abbildung 1 wurde mit freundlicher Genehmigung der Elektromagnetik-Akademie JPIER verwendet.

Somit ist elementare Kraft zwischen e und e' entlang r

$$\begin{aligned} \delta F_{r-} &= \frac{ee'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \left[1 + \frac{(v^2 - 2vv' \sin \theta)}{c^2} - \frac{3}{2c^2} (v^2 \cos^2 \alpha - 2vv' \cos \alpha \cos \gamma) \right] \\ &= \frac{ee'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \left[1 + \frac{v^2}{c^2} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \alpha \right) + \frac{vv'}{c^2} (2 \sin \theta + 3 \cos \alpha \cos \gamma) \right] \end{aligned}$$

Nun unterliegt e auch einer entgegengesetzten Kraft wegen der stationären positiven Ionen, die sich in Q befinden. Setzt man $v' = 0$, so ist die Kraft

$$\delta F_{r+} = \frac{ee'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \left[1 + \frac{v^2}{c^2} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \alpha \right) \right].$$

So ist die Nettokraft entlang r zwischen dem Elektron und dem laufenden Elektron

$$\delta F_r = \frac{ee'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \left[\frac{vv'}{c^2} (3 \cos \alpha \cos \gamma - 2 \sin \theta) \right].$$

Somit ist die Auslenkungskraft senkrecht zum Strahl (das heißt in der y -Richtung) $(\delta F)_y = \delta F_r \cos \beta$, das ergibt

$$(\delta F)_y = \frac{ee'vv'}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} (3 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 2 \sin \theta \cos \beta).$$

Nun ist $e' = (nAea\delta\theta)$ und $I = nAv'e$, so daß

$$\frac{ee'vv'\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} = \frac{e(nAea\delta\theta)vv'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{evIa\delta\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}.$$

Setzt man

$$(\delta F)_y = \frac{eV}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{3a(b - a \cos\theta)(h - a \sin\theta)(b \sin\theta - h \cos\theta)}{r^5} - \frac{2a \sin\theta (h - a \sin\theta)}{r^3} \right],$$

erhält man die Kraft über die komplette Schleife als

$$(F)_y = \frac{eV}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[-2ah \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{r^3} d\theta + 2a^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{r^3} d\theta + 3ab^2h \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{r^5} d\theta \right. \\ \left. - 3a^2b^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{r^5} d\theta - 3a^3h \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta \cos^2\theta}{r^5} d\theta - 3abh^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^5} d\theta \right. \\ \left. - 3a^2b^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{r^5} d\theta + 3a^2h^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{r^5} d\theta + 3a^3b \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta \cos\theta}{r^5} d\theta \right]$$

Somit ist schließlich die in der y-Richtung wirkende Kraft auf den e-Strahl im Punkt (b, h, z) wegen der Einzelstromschleife

$$(F_r)_y = \frac{eV}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot [-2ah[I_1] + 2a^2[I_2] + 3ab^2h[I_3] - 3a^2b^2[I_4] - 3a^3h[I_5] - 3abh^2[I_6] + 3a^2h^2[I_7] + 3a^3b[I_8]] \quad (5)$$

worin $[I_1] = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{r^3} d\theta$; $[I_2] = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{r^3} d\theta$; $[I_3] = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{r^5} d\theta$; $[I_4] = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{r^5} d\theta$;

$[I_5] = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta \cos^2\theta}{r^5} d\theta$; $[I_6] = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^5} d\theta$; $[I_7] = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{r^5} d\theta$; $[I_8] = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta \cos\theta}{r^5} d\theta$

und $r = \sqrt{(a^2 + b^2 + h^2 + z^2 - 2ab \cos\theta - 2ah \sin\theta)}$.

Im letzten Abschnitt der Berechnung ist nun die Kraft an verschiedenen Punkten entlang des Elektronenstrahls auf der Basis einer vollständigen Spule zu bestimmen. Dies wird nun betrachtet.

3.2. Berechnung auf Basis einer Spule als Stapel von Stromschleifen

Die Verwendung einer sphärischen Standardstrahlröhre (Teltron) legt in der vorliegenden Untersuchung Beschränkungen hinsichtlich der Lage der stromdurchflossenen Elektromagneten in Bezug auf den Elektronenstrahl auf. Unsere Berechnung wird dann auf einem Elektromagneten oberhalb und zu einer Seite des Strahls basieren, wie in Figur 2 gezeigt; Der Strahl ist dann in der zentralen (x, y)-Ebene der Spule.

Der Spulenradius **a** und der Abstand **h** des Strahls unterhalb der x-Achse sind fixiert. Die x-Koordinate **-b**, ist variabel zwischen **0** und **-0,1 m** in Schritten von **-0,002 m**. Dies ermöglicht die Berechnung der

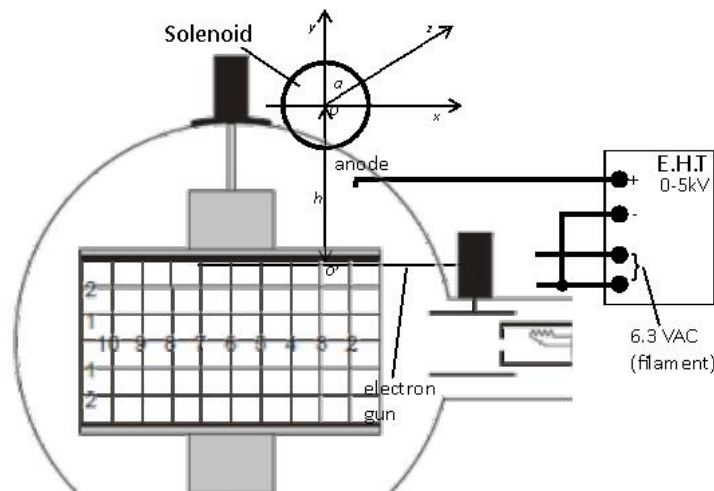


Abb. 2: Elektronenstrahl-Ablenkungsröhre mit langer Spule, mittig um den Strahl angeordnet. Der Ausgangspunkt O' des Strahls der Elektronenkanone liegt in der y-z-Ebene der Spule.

Abbildung 2 wurde mit freundlicher Genehmigung der Elektromagnetik-Akademie JPIER verwendet.

Kraft $F_y(b)$ an den Punkten entlang des Strahls und für eine gegebene Strahlgeschwindigkeit, der Impuls der Kraft $\int F_y dt$ kann bestimmt werden und somit die Änderung des vertikalen Moments. Dann wird unter der Annahme einer konstanten Masse (nicht-relativistisch) die erfasste Vertikalgeschwindigkeit berechnet und schließlich die maximale Strahlablenkung (siehe 3.3.2). In der Berechnung für die gesamte Spule ist es zweckmäßig, die Spule in 1-cm-Abschnitte entlang der z -Achse zu unterteilen. Die verwendeten Spulen sind doppelt gewickelt und haben die gleiche Wicklungsdichte von 26 Windungen pro cm. Dann wird mit Gl. (5) F_y für eine Reihe von b -Werten berechnet (0-10 cm). Für eine 50 cm lange Spule benötigen wir,

$$F_y(b) = \frac{2x26evI}{4\pi\epsilon_0c^2} \cdot \sum_{z=0,005}^{0,245} [-2ah[I_1] + 2a^2[I_2] + \dots + 3a^3b[I_8]] \quad (6)$$

wobei die mittleren z -Abstände 0,5, 1,5, 2,5, ..., 24,5 cm sind und der Faktor 2 beide Seiten der Magnetspule umfaßt. In der Praxis ist $I = 5,00 \text{ A}$, $v = 2,06 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ (basierend auf $v = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}}$

wobei $V = 1200 \text{ V}$ und $\frac{e}{m_e} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$) und der Multiplikationsfaktor außerhalb des Integranden der Summierung ist $0,856 \cdot 10^{-16} \text{ (S.I.)}$. Die numerischen Berechnungen wurden unter Verwendung des MATLAB bei Benutzung der Trapezregel mit 72 Theta-Schritten für die h -Werte von 0 bis 0,1 m in Schritten von 0,002 m durchgeführt.

3.3. Die Berechnung der Strahlablenkung basierend auf dem Lorentz-Kraftgesetz und der Weber-Ritz-Kraftformel

3.3.1. Das Lorentz-Kraftgesetz

Die Messung des äußeren magnetischen Feldes nahe einer langen Spule bestätigt, daß in der Nähe des Elektronenstrahls das Feld bis zu rund 10% für die 0,50 m lange und die 0,75 m lange Spule gleichförmig ist, nicht aber für die 0,25 m lange Spule. Die analytischen Berechnungen von Farley und Price [8] für lange Spulen bestätigen ebenfalls die Gleichförmigkeit des Feldes. So wird der Elektronenstrahl in einem im Wesentlichen gleichförmigen magnetischen Feld im rechten Winkel zu seinem Weg abgelenkt, und die entsprechenden Ablenkungen sind durch die Linke-Hand-Regel vorhersagbar. In einem gleichförmigen magnetischen Feld B wird der Strahl auf einen Kreis mit dem Radius R ausgelenkt, wobei er eine vertikale Auslenkung y über einen horizontalen Abstand x erzeugt. Aus der Geometrie der Abbildung 3, $R^2 = x^2 + (R-y)^2$, gewinnt man $R = (x^2 + y^2) / 2y$. Die magnetische Komponente aus dem Lorentz-Kraftgesetz wird dann der Zentripetalkraft gleichgesetzt, das heißt, $B_{ev} = m_e \cdot \frac{v^2}{R}$. Mit den Datenwerten von $v = 2,06 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ und $e/m_e = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$ ergibt sich

$$R = \frac{1,170}{B} \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

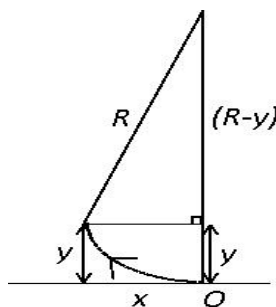


Abb. 3: Elektronenstrahl-Ablenkung in einem quer verlaufenden Magnetfeld (senkrecht zur Papierebene)

Abbildung 3 wurde mit freundlicher Genehmigung der Elektromagnetik-Akademie JPIER verwendet.

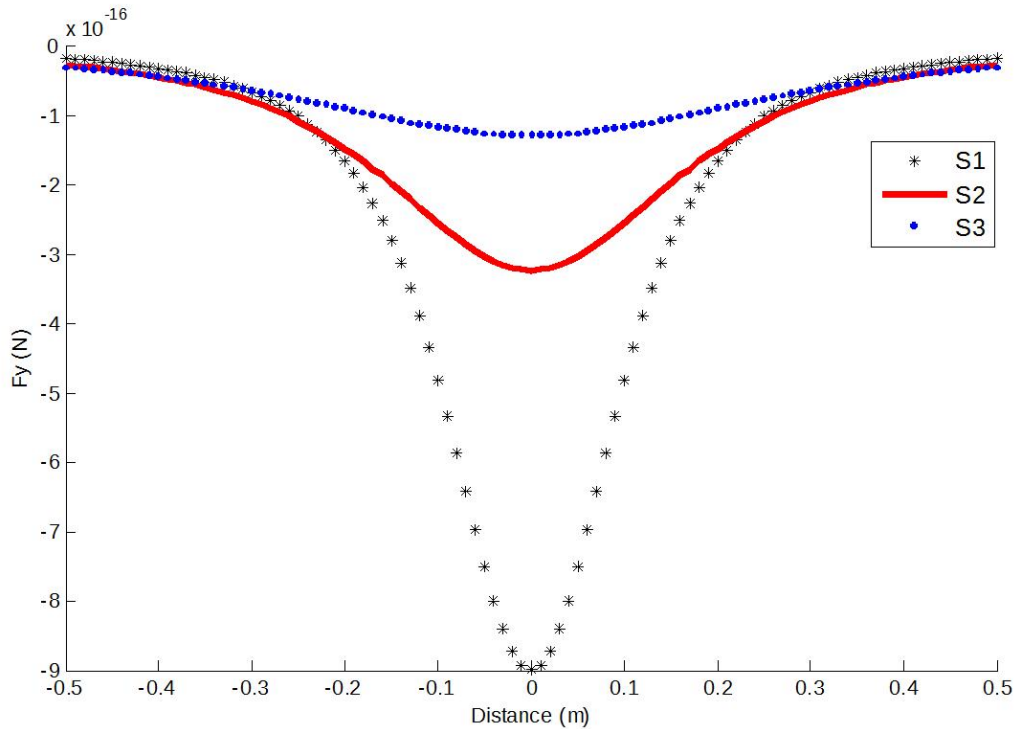


Abb. 4: Die vorhergesagte vertikale Kraftvariation (Weber-Ritz) für jede Spule während der Annäherung und des Passierens des Elektronenstrahls. Die Kraft wird unter der Annahme berechnet, daß der Elektronenstrahl in jedem Punkt vorhanden ist (das heißt, sich der Strahlweg nicht ändert). Der Ursprung stellt die Ebene dar, in der jede Spule senkrecht zum sich annähernden Strahl steht, und bei der der Wert der vorhergesagten vertikalen Kraft am größten ist.

Abbildung 4 wurde mit freundlicher Genehmigung der Elektromagnetik-Akademie JPIER verwendet.

worin die magnetische Flußdichte in Tesla angegeben wird. In dem tatsächlichen Experiment ist $x = 0,10 \text{ m}$ und deshalb sind die y -Werte quadratisch zu bestimmen, $y = R \pm \sqrt{R^2 - 0,01}$. Da $R^2 \gg 0,01$, kann die vertikale Strahlablenkung $y \text{ (mm)}$ über einem horizontalen Abstand von 10 cm berechnet werden zu

$$y \text{ (mm)} = 0.0427 B$$

wobei B hier in μT einzusetzen ist.

Die Werte von B für Spulen **S1**, **S2**, **S3** werden aus Messungen mit einer Hall-Sonde entlang der Länge des Strahls erhalten. Abbildung 6 bestätigt die Gleichförmigkeit des magnetischen Feldes für die Spulen **S2** und **S3**, die mit der Eichkurve von Abb. 5 konsistent ist, im Falle der Spule **S1** macht die Ungleichmäßigkeit des Feldes die Berechnung der Strahlablenkungen unsicher.

3.3.2. Die Weber-Ritz Kraftformel

Berechnungen der Kraft an verschiedenen Punkten entlang des Strahls unter Verwendung von Gleichung (6), zeigen, daß über den 10 cm horizontalen Weg die Kraft nicht gleichförmig ist. Um diese Ungleichmäßigkeit zu begründen und die maximale Strahlablenkung im rechten Winkel zum Weg zu erhalten, wurde die folgende Verfahrensweise angenommen. Die typische Kraftvariation quer zum Strahl ist in Abb. 4 dargestellt, wobei die horizontale Achse die Entfernung darstellt ($b \text{ cm}$) oder die Zeit; für eine Strahlgeschwindigkeit von $2,06 \cdot 10^7 \text{ m/s}$, eine 10 cm lange horizontale Bewegung wird in einem Zeitintervall von $4,85 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ überspannt.

Der Impuls J , der dem Elektron über die 10 cm lange Bewegung gegeben wird, ist $\int_0^{4,85 \cdot 10^{-9}} F_y(b) dt$ und wird durch einfache Integration berechnet (Trapez-Regel). Der Impuls wird dann der Änderung des vertikalen Moments gleichgesetzt $J = m_e \times v_v$, worin m_e die Elektronenmasse ist und v_v die vertikale Geschwindigkeitskomponente ist.

Die mittlere vertikale Beschleunigung ist dann $a_v = v_v / t$ und die maximale vertikale Auslenkung ist

$$y(\text{max}) = \frac{1}{2} a_v t^2 = \frac{1}{2} v_0 t = \frac{1}{2} \left(\frac{J}{m_e} \right) t$$

Nun ist t = die Zeit, die der Strahl in der 10 cm langen Ablenkzone = $4,85 \cdot 10^{-9}$ s verweilt. Schließlich wird die maximale vertikale Strahlablenkung in Metern gegeben durch

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{J}{m_e} \right) \times 4,85 \cdot 10^{-9} = 2,66 \cdot 10^{21} \cdot J \text{ [m]}, \text{ wobei } J \text{ der berechnete Impuls in [N}\cdot\text{s] ist.}$$

4. Experimentelle Untersuchung

Die allgemeine Anordnung ist in Abb. 2 gezeigt. Das Hauptmerkmal ist eine Standard-Teltron-Elektronenstrahlröhre mit einer Elektronenkanone, die ein enges, fokussiertes Band aus Elektronen innerhalb eines evakuierten Glaskolbens emittiert. Die Elektronenkanone wird mit einer **5 kV** E.H.T.-Einheit betrieben und erzeugt Strahlgeschwindigkeiten zwischen $2 \cdot 10^7$ und $5 \cdot 10^7$ m/s. Ein wichtiges Merkmal der Röhre ist, daß der Elektronenstrahl von einem flachen Glimmerplättchen aufgefangen wird, dessen eine Seite mit einem Leuchtschirm beschichtet und die andere Seite mit einem Zentimetermaß bedruckt ist, so daß die Elektronenbahn leicht verfolgt werden kann. Der Teltron Stützfuß kann Standard-Helmholtzspulen aufnehmen, so daß die Elektronenstrahl-Auslenkungen gegen bekannte Quermagnetfelder kalibriert werden können.

Im Versuchsaufbau wurden drei Spulen der Längen **0,25 (S1)**, **0,50 (S2)** und **0,75 (S3) m**, mit jeweils etwa **6 cm** Durchmesser verwendet. Die Spulen sind doppelt gewickelt mit der gleichen Wicklungsdichte von 2600 Windungen pro Meter.

Eine gegebene Spule befindet sich zwischen zwei (nicht magnetischen) Widerlagern und steht mittig über dem Hals der Strahlröhre, so daß die zentrale **x-y**-Ebene der Spule mit dem Strahlaustritt der Elektronenkanone zusammenfällt, wie in Abb. 2 gezeigt. Unter Benutzung einer Reihe flacher Gleichstromquellen kann jede Spule mit einem Gleichstrom von **5,00 A** versorgt werden.

Natürlich haben wir es nicht mit 'unendlichen' Spulen zu tun und deshalb muß das externe Feld (Schwund) berücksichtigt werden. Es wurde oft versucht, gleichstromführenden Spulen oder Ringspulen null externe Magnetfelder zu unterstellen, und das ist in der Tat falsch.

Die elektromagnetische Standardtheorie sagt aus, daß für unendliche Spulen ein externes Feld $B_0 = \mu_0 I / 2\pi r$ [9] vorhanden ist während es für ein Toroid eine **r**-Komponente des externen Feldes gibt, die in der Umgebung der **z**-Achse des Toroides auf

$$B_r = B_z = (\mu_0 I a^2) / 2\pi (a^2 + z^2)^{3/2} \text{ [10] reduziert ist; worin } a \text{ der mittlere Radius des Toroids ist.}$$

Wichtig ist auch, die Empfindlichkeit des e-Strahls von den vorhandenen relativ kleinen Magnetfeldern abzuschätzen. Wenn beispielsweise die freistehende Strahlröhre (Strahlspannung, sagen wir, 1,5 kV) fortlaufend um 360 Grad rotiert, dann wird eine maximale Strahlablenkung von etwa **2 mm** beobachtet, wenn die Strahlachse in Ost-West-Richtung ausgerichtet ist (d. h. im rechten Winkel zum Erdmagnetfeld, $\sim 20 \mu T$). Die Experimente wurden durchgeführt bei Ausrichtung der Strahlachse in Nord-Süd-Richtung, um die Effekte aus dem Erdmagnetfeld zu minimieren. Es gibt nun drei Stufen der experimentellen Untersuchung:

(1) In Anbetracht der Signifikanz der axialen Feldverluste bei endlichen Magneten, ist es wichtig, die Strahlauslenkungen mit bekannten Werten der im rechten Winkel zu dem Strahl gerichteten magnetischen Felder zu korrelieren. Das wurde mit Helmholtzspulen (HH) ausgeführt, deren Wicklungen speziell an die Teltron-Strahlröhre angepaßt wurden. Gibt man an die HH-Spulen ein einheitliches Magnetfeld von etwa **4,2 $\mu T/mA$** kann die Strahlablenkung dann für eine Reihe von präzisen Gleichströmen durch die Spulen gemessen werden. Dies ermöglicht den Erhalt einer Eichkurve der maximalen Strahlablenkung (**mm**) gegen das Quermagnetfeld (**μT**) (Abbildung 5). Eine solche Kurve kann dann dazu verwendet werden, die Lorentz-Kraft (magnetische Komponente) auf den Strahl zu überprüfen, die aufgrund des axialen Magnetfeldes von dem Elektromagneten entsteht, das den Strahl im rechten Winkel kreuzt.

(2) Die maximalen Strahlauslenkungen werden nun für jede der Spulen erneut gemessen. Eine gegebene Spule wird quer zum Hals der Strahlröhre angeordnet, und für jede Messung wird ein Gleichstrom von **5,00 A** für ungefähr **10 Sekunden** aufrechterhalten. Um eine Reststrahlablenkung von etwa

1 mm zu kompensieren, wird in der Praxis der Magnetstrom umgekehrt und damit eine mittlere Ablenkung erzeugt.

(3) Schließlich wird das mit der Strahlröhre entfernte axiale Magnetfeld gemessen unter Benutzung einer Hall-Probe in cm-Schritten um jeden Elektromagneten zur ursprünglichen Strahlposition (Abbildung 6).

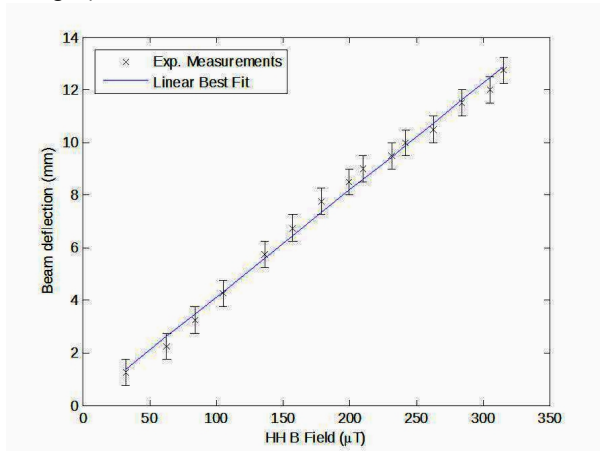


Abb. 5. Gemessene Strahlablenkung gegen das Quermagnetfeld (HH-Spulen bei $[4,23 I \text{ (mA)}] \mu\text{T}$).

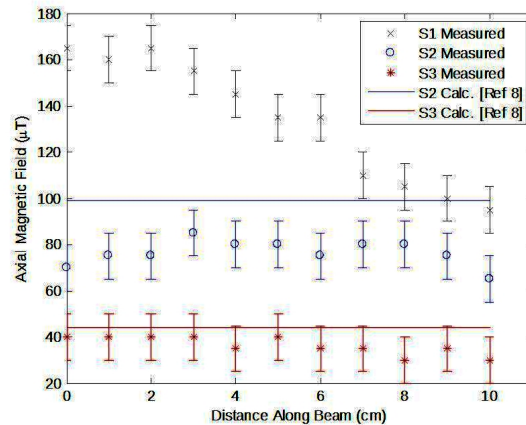


Abb. 6. Magnetfeldänderung im rechten Winkel zum Elektronenstrahl für die Spulen S1, S2, S3 mit konstantem Gleichstrom von 5,00 A. Berechnete Feldänderungen für S2 und S3 werden angezeigt unter Verwendung von $B_{ext} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mu_0 n I A}{L^2}$ [8]

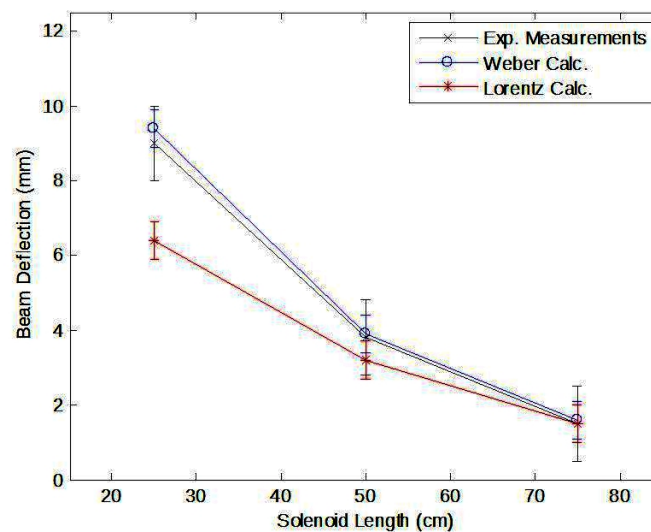


Abb. 7. Berechnete und gemessene Strahlablenkungen für die drei Spulen (S1, S2, S3).

Abbildungen 5, 6 und 7 wurden mit der freundlicher Genehmigung der Elektromagnetik-Akademie JPIER verwendet.

Die Technik ist, zunächst Null auf die Sonde zu setzen, dann auf den Spulengleichstrom auf **5,00 A** schalten und das Magnetfeld in μT aufzuzeichnen; die Genauigkeit wird auf etwa $\pm 10 \mu\text{T}$ geschätzt. Die Messwerte des axialen Feldes für die drei Magnetspulen sind in Abbildung 6 gezeigt.

5. Ergebnisse

Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 5 bis 7 und in Tabelle 1 zusammengefasst. Abbildung 5 zeigt die Eichkurve für die Strahlablenkungen gegen das Quermagnetfeld, die durch die HH-Spulen erzeugt werden. Abbildung 6 zeigt die gemessenen axialen magnetischen Felder (Schwund) für die drei

Magnetspulen, die in dem Experiment verwendet werden. Die Plots zeigen an, wie das äußere magnetische Feld jeder Spule an den Punkten entlang des Elektronenstrahls variiert. Für die längeren Spulen (S2, S3) ist das Feld im Wesentlichen einheitlich. Dies steht im Einklang mit den berechneten externen Feldern, die von langen Spulen in [8] erzeugt werden, wobei $B_{ext} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mu_0 n I A}{L^2}$; n = Wicklungsdichte, r = Radius, L = Länge.

Tabelle 1. Zusammenfassung der berechneten und der gemessenen Strahlauslenkungen

Spulenlänge (m)	Berechnet (mm)		Gemessen, Mittelwert (mm)
	Weber-Ritz	Lorentz	
0,25 (S1)	9,4 ± 0,5	6,4 ± 0,5	9,0 ± 1,0
0,50 (S2)	3,9 ± 0,5	3,2 ± 0,5	3,8 ± 1,0
0,75 (S3)	1,6 ± 0,5	1,5 ± 0,5	1,5 ± 1,0

Für die Spule **S3** mit einem Strom von **5,00 A** ist das berechnete Feld $B \approx 44 \mu T$, während für die Spule **S2** $B \approx 99 \mu T$ ist. Für die kurze Spule **S1** ist eine solche Näherungsformel nicht gültig, auch gibt es keine einheitlichen Feldzustände. Schließlich wird in Abbildung 5 und in der Tabelle 1 der grundsätzliche Vergleich zwischen Experiment und Theorie gezeigt. Dies wird in drei Zeichnungen veranschaulicht: (a) die mittleren gemessenen Strahlauslenkungen für die drei Spulen; (b) die berechneten Strahlauslenkungen auf der Grundlage der Weber-Ritz-Formel; (c) die berechneten Strahlauslenkungen auf der Basis der magnetischen Komponente des Lorentz-Kraftgesetzes.

Für die Berechnung der maximalen Strahlauslenkung auf der Grundlage des Lorentz-Kraftgesetzes wird die magnetische Flußdichte des axialen Feldes verwendet, gemessen in der Nähe des Elektronenstrahls; dann die Eichkurve von Abbildung 5, um die Strahlablenkung zu erhalten. Außerdem wird nach dem Lorentz-Kraftgesetz ein statisches elektrisches Feld vorhanden sein, das gleichfalls in Richtung dieser Kraft wirkt. Dies wird nun betrachtet.

Eine Quelle des statischen elektrischen Feldes ergibt sich aus der Eigenkapazität der Spulen durch den Gleichstrom über die Spule. Welsby [11] hat experimentelle Daten der Spulenkapazität für einzelne Schichten zur Verfügung gestellt. Empirisch gefunden liegt die Eigenkapazität in **pF** in der gleichen Größenordnung wie der Spulendurchmesser in Zentimetern. So beträgt für die **75 cm** lange Spule mit **6 cm** Durchmesser mit einem Längen/Durchmesser-Verhältnis von etwa **10** die Eigenkapazität etwa **6 pF**. Wenn sie auf **80 V** aufgeladen wird, entsteht eine summare Ladung von $Q = 6 \cdot 10^{-12} \cdot 80 = 4,8 \cdot 10^{-10} C$. Da Ladung über **0,75 m** verteilt ist, dann, $\lambda = \text{Ladung pro Längeneinheit} = 7,2 \cdot 10^{-10} C/m$. Duffin [12] gibt das radiale E-Feld bei einem Radius r von der Achse des Zylinders an als $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$, und unter der Annahme $r = 0,05 m$ ergibt das ein E-Feld von etwa **230 V/m**, das aus der Eigenkapazität entsteht. Die Messung des Radialfeldes bei etwa **2,5 cm** von der Oberfläche derselben Spule wurde mit einem hochstabilen Oberflächen-Gleichstrom-Voltmeter (Alpha Labs Inc., USA) ausgeführt; die gemessenen Werte lagen zwischen **150** und **200 V/m**, was den Berechnungen angemessen entspricht.

Die andere Quelle des statischen elektrischen Feldes ist eine natürliche Folge der überschüssigen Elektronenladung nahe an der Erdoberfläche. Auch hier bringen Messungen mit dem Oberflächen-Gleichspannungsmesser einen Wert von etwa **150 V/m**. Nimmt man das als gegeben, so ist nur die Komponente des E-Feldes im rechten Winkel zu dem Strahl signifikant, wir können insgesamt einen statischen E-Feldbeitrag von rund **250 V/m** erwarten. Eine typische Strahlablenkungsberechnung in einem statischen Feld gibt zum Beispiel Bennet [13] mit $d = eEl/2mv^2$ an, und mit den Werten $e/m = 1,76 \cdot 10^{11} C/kg$, $E = 250 V/m$, $l = \text{Strahllänge über dem Feld} = 0,1 m$, $v = 2,06 \cdot 10^7 m/s$, ergibt sich dadurch $d = 0,5 mm$ (Maximum). In diesem Falle können wir allein vom Feld der Erde eine ständige Strahlablenkung von annähernd **0,3 mm** erwarten, und dies ist eine wahrscheinliche Erklärung für die Nicht-Null-Ablenkung in der freistehenden Strahlröhre. Da es sich um eine vorläufige Untersuchung handelt, müssen unserer Ergebnisse durch weitere experimentelle Arbeiten mit größeren Gleichstromimpulsen erhärtet werden in der Absicht, die Fehlergrößen zu reduzieren.

6. Schlußbemerkungen

Unsere erste Untersuchung der Elektronenstrahlauslenkungen durch eine lange gleichstromführende Spule, die sich quer über dem Strahl befindet, hat einige interessante Ergebnisse vom Standpunkt der fundamentalen Physik erbracht. Die Anwendung der Weber-Ritz Kräftformel (eine Reihe von numerischen Integrationen eingebunden) zur Berechnung der Elektronenstrahlauslenkungen hat Korrelationen mit den experimentellen Messungen bei Strahlgeschwindigkeiten von ca. **2 · 10⁷ m/s** gezeigt. Es

wird betont, dass eine solche Abfassung der Direktwirkung nur elektrische Kräfte zwischen den Ladungen beinhaltet. Im Gegensatz dazu beruht der feldbasierte Ansatz der Lorentz-Kraft-Formel auf der Messung der externen B-Felder in der Nähe des Strahls in Kombination mit der Eichkurve der Strahlauslenkungen gegen bekannte magnetische Felder. Die magnetischen Felder für die Magnetspulen **S2** und **S3** sind im Wesentlichen konform wie in [8] vorhergesagt, so dass zuverlässige Interpolation der Strahlauslenkungen nach der Eichkurve der Abbildung 5 möglich sind. Dagegen macht der Mangel an Feldkonformität im Falle der kürzeren Spule (**S1**) die Vorhersage der Strahlablenkung unzuverlässig (ein mittlerer Feldwert von $150 \mu T$ wurde vorausgesetzt).

Da sich die Weber-Ritz-Kraftformel direkt auf die elektrischen Kräfte zwischen bewegten Ladungen für ein diskretes System bezieht, liefert dies eine genaue Berechnungsmöglichkeit der Elektronenstrahlablenkung für die kleinere Spule von 25 cm Länge (**S1**). Insbesondere für die Spule **S1** sind wir in der Lage, die Kraft, die der Elektronenstrahl in einer ungleichmäßigen (gestreuten) Feld erfährt, genau zu modellieren. Der herkömmliche Maxwell-Lorentz-Ansatz beruht auf der Berechnung von Feldern in einem kontinuierlichen System und ein solcher Ansatz ist in der Regel komplex und rechenintensiv [14]. Darüber hinaus ist das dritte Newtonsche Gesetz von Natur aus durch Webers Kraftgesetz erfüllt und damit werden der Teilchenimpuls und der Drehimpuls erhalten. Die in diesem Artikel vorgestellten Ergebnisse sind auch über die Zusammenhänge von Magnetspulen und Elektronenstrahlen hinaus von Interesse. Unsere Berechnungen zeigen die Realisierbarkeit der Verwendung eines solchen Ansatzes für die Modellierung der Teilchenoptik im allgemeinen [15-19].

Obwohl das Hauptanliegen der vorliegenden Untersuchung für diesen speziellen Fall der Vergleich von Weber-Ritz und Maxwell-Lorentz Elektrodynamik gewesen ist, entsteht zwangsläufig auch die Frage, ob der Weber-Ritz-Ansatz der Berechnung eine mögliche klassische Erklärung des AB-Effekts liefern kann. Boyer [20] hat eine halbklassische Erklärung des AB-Effekts gegeben, während Batelaan und Tonomura [21] durch eine Kombination von experimentellen und theoretischen Arbeiten, die quantenmechanische Erklärung vorgeschlagen haben. Boyer hat diese beiden Gesichtspunkte zusammengefaßt: *"... die derzeit anerkannte Quantentheorie akzeptiert die Idee, daß die elektrostatische Phasenverschiebung einer Ladung, die eine Reihe von elektrischen Dipolen passiert auf eine klassische Verzögerung zurückzuführen ist, aber behauptet, daß die magnetische Phasenverschiebung eines aufgeladenen Leiters eines Magneten aufgrund eines neuen quantenmechanischen Effekts kein klassisches Analogon habe."* [20]

Darüber hinaus behauptet Boyer, daß entweder auf der Grundlage, (I) der Änderung der kinetischen Energie der durchlaufenden Ladung, die durch die Interaktion mit dem konstanten Spulenstrom, oder (II) der Beschleunigung der Spulenelektronen, die durch das Passieren der bewegten Ladung eines elektrischen Feldes hervorgerufen wird; daß beide zu Zeitverzögerungen in einem Elektronenstrahl führen müßten, der eine makroskopische Spule durchquert. Jedoch Caprez und andere [22] führten derzeit erfolgreich ein Experiment durch, nach dem in einen solchen Fall keine Zeitverzögerungen gefunden wurden und daraus den Schluß zogen, daß solche Kräfte nicht vorhanden sind. Im Gegensatz sagt die Weber-Ritz-Berechnung eine Kraft voraus, die auf einer konstanten Strahlgeschwindigkeit in sehr langen Magnetspulen basiert (die Beschleunigungsglieder in der Kraftformel werden ignoriert). Weitere Untersuchungen mit Magnetspulen sehr viel kleinerer Durchmesser sind erforderlich.

Es ist auch zweckmäßig, diese Arbeiten in Zukunft zu erweitern, um die Weber-Ritz-Theorien für Elektronengeschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit zu testen. Nach O'Rahilly [1, Seiten 613-622] steht Ritz' Theorie für Hochgeschwindigkeitselektronen in Einklang mit den experimentellen Ergebnissen (und dies direkt ohne die Anwendung des Lorentz- Korrekturfaktors), wenn der Konstanten λ eher der Wert 3 als -1 zugeordnet wird. Solche Arbeiten werden benötigen eine spezielle Strahlröhre, ausgestattet mit einer Elektronenkanone und einer E.H.T-Einheit, die Elektronenstrahlgeschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit bereitstellen. Dies würde wahrscheinlich die Form eines zylindrischen Rohres sein, über dem die Magnetspulen genau positioniert werden; die Strahlauslenkung kann auf einem großen Fluoreszenz-Bildschirm an einem Ende des Rohrs aufgenommen werden. Eine direkte Messung der Strahlgeschwindigkeit wäre eine zusätzliche Verfeinerung.

Literatur

1. O’Rahilly, A., *Electromagnetic Theory: A Critical Examination Of Fundamentals*, Dover Publications, New York, 1965.
2. Smith, R. T., S. Taylor, and S. Maher, “Modelling electromagnetic induction via accelerated electron motion,” *Canadian Journal of Physics*, 2014.
3. Assis, A. K. T., *Weber’s Electrodynamics*, Springer, 1994.
4. Caluzi, J. J. and A. K. T. Assis, “A critical analysis of Helmholtz’s argument against Weber’s electrodynamics,” *Foundations of Physics*, Vol. 27, 1445–1452, 1997.
5. Assis, A. K. T., W. A. Rodrigues, Jr., and A. J. Mania, “The electric field outside a stationary resistive wire carrying a constant current,” *Foundations of Physics*, Vol. 29, 729–753, 1999.
6. Assis, A. K. T., “On the propagation of electromagnetic signals in wires and coaxial cables according to Weber’s electrodynamics,” *Foundations of Physics*, Vol. 30, 1107–1121, 2000.
7. Kinzer, E. T. and J. Fukai, “Weber’s force and Maxwell’s equations,” *Foundations of Physics Letters*, Vol. 9, 457–461, Oct. 1, 1996.
8. Farley, J. and R. H. Price, “Field just outside a long solenoid,” *American Journal of Physics*, Vol. 69, 751–754, 2001.
9. Lorrain, P. and D. R. Corson, *Electromagnetic Fields and Waves*, 2nd edition, W. H. Freeman & Company, New York, 1969.
10. Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, 2nd edition, J. Wiley & Sons, New York, 1975.
11. Welsby, V. G., *The Theory and Design of Inductance Coils*, Macdonald, 1950.
12. Du□n, W. J., *Electricity and Magnetism*, Volume 3, McGraw-Hill, 1973.
13. Bennet, G. A. G., *Electricity and Modern Physics: Mks Version*, Edward Arnold, 1968.
14. Gibson, J. R., K. G. Evans, S. U. Syed, S. Maher, and S. Taylor, “A method of computing accurate 3D fields of a quadrupole mass filter and their use for prediction of filter behavior,” *Journal of the American Society for Mass Spectrometry*, 1–9, 2012.
15. Maher, S., S. U. Syed, D. M. Hughes, J. R. Gibson, and S. Taylor, “Mapping the stability diagram of a quadrupole mass spectrometer with a static transverse magnetic field applied,” *Journal of the American Society for Mass Spectrometry*, Vol. 24, 1307–1314, 2013.
16. Maher, S., F. P. Jjunju, and S. Taylor, “Colloquium: 100 years of mass spectrometry: Perspectives and future trends,” *Reviews of Modern Physics*, Vol. 87, 113, 2015.
17. Syed, S. U., S. Maher, and S. Taylor, “Quadrupole mass filter operation under the influence of magnetic field,” *Journal of Mass Spectrometry*, Vol. 48, 1325–1339, 2013.
18. Syed, S. U., S. Maher, G. B. Eijkel, F. P. M. Jjunju, S. Taylor, and R. M. A. Heeren, “A direct ion imaging approach for the investigation of ion dynamics in multipole ion guides,” *Analytical Chemistry*, Vol. 87, 3714–3720, 2015.
19. Satyalakshmi, K. M., A. Olkhovets, M. G. Metzler, C. K. Harnett, D. M. Tanenbaum, and H. G. Craighead, “Charge induced pattern distortion in low energy electron beam lithography,” *Journal of Vacuum Science & Technology B*, Vol. 18, 3122–3125, 2000.
20. Boyer, T. H., “Comment on experiments related to the Aharonov-Bohm phase shift,” *Foundations of Physics*, Vol. 38, 498–505, 2008.
21. Batelaan, H. and A. Tonomura, “The Aharonov-Bohm effects: Variations on a subtle theme,” *Physics Today*, Vol. 62, No. 9, 2009.
22. Caprez, A., B. Barwick, and H. Batelaan, “Macroscopic test of the Aharonov-Bohm effect,” *Physical Review Letters*, Vol. 99, 210401, 2007.